

**2009-2010**

# **MASTER 2<sup>ème</sup> année**

Domaine : Sciences et Applications  
Mention : Mathématiques et Informatique

## **Spécialité : LMFI**

### **LOGIQUE MATHÉMATIQUE ET FONDEMENTS DE L'INFORMATIQUE**

UFR de Mathématiques  
Case 7012  
75205 PARIS cedex 13  
Téléphone : 01 44 27 37 61  
Fax : 01 44 27 81 64  
e-mail : [wasse@math.jussieu.fr](mailto:wasse@math.jussieu.fr)

*Localisation :*  
*5C24, 5<sup>ème</sup> étage, Bâtiment C*  
*175 rue du Chevaleret*  
*75013 PARIS*

**Université Paris Diderot - Paris 7**  
**2009-2010**

**MASTER 2<sup>ème</sup> année**

**Spécialité : LMFI**

**LOGIQUE MATHÉMATIQUE**  
**ET**  
**FONDEMENTS DE L'INFORMATIQUE**

Responsable de la formation : Arnaud Durand

[durand@logique.jussieu.fr](mailto:durand@logique.jussieu.fr)

Site web : <http://www.logique.jussieu.fr/www.M2-LMFI>

Equipes de recherche organisatrices :

Logique Mathématique – FRE 3233 du CNRS

Preuves, Programmes, Systèmes (PPS) - UMR 7126 du CNRS

*Ce Master 2<sup>ème</sup> année offre une formation de haut niveau en Logique. Il a pour objectif de former des chercheurs ou ingénieurs de recherche possédant la maîtrise des outils logiques fondamentaux utilisés en Mathématiques et en Informatique.*

Cette formation, qui s'intègre dans le cadre du nouveau système LMD, mis en place dans les universités françaises, remplace le DEA de Logique Mathématique et Fondements de l'Informatique de l'Université Paris Diderot.

**LMFI** est une des spécialités de la mention *Mathématiques et Informatique* du Master Sciences et Applications de l'Université Paris 7.

Deux parcours sont présents dans la spécialité LMFI, intitulés :

- *Logique Mathématique,*
- *Logique et Informatique.*

### **Equipe pédagogique :**

C. Berline	R. Lassaigne
S. Boughattas	J. Lopez-Abad
E. Bouscaren	A. Louveau
E. Chailloux	G. Malod
Z. Chatzidakis	P. Manoury
R. Cori	P-A. Melliès
P-L. Curien	M-H. Mourgues
V. Danos	F. Oger
F. Delon	M. Parigot
M. Dickmann	F. Point
A. Durand	A. Prouté
T. Ehrhard	C. Raffalli
O. Finkel	J-P. Ressayre
S. Grigorieff	M. de Rougemont
J-B. Joinet	P. Rozière
T. Joly	P. Simonetta
A. Khélif	C. Sureson
J-L. Krivine	S. Todorcevic
R. Labib-Sami	B. Velickovic

## MASTER 2<sup>EME</sup> ANNEE

### CONDITIONS D'ADMISSION

Le candidat devra avoir validé une 1<sup>ère</sup> année de Master (M1), une Maîtrise ou un titre équivalent. Cette première année devra avoir été effectuée dans une spécialité mathématique, informatique, ou logique (dans ce dernier cas, par exemple, dans le cadre d'un master de philosophie)

Les étudiants qui souhaitent s'inscrire dans ce M2 doivent déposer une demande de pré-inscription sur le site web : <http://sesame.univ-paris-diderot.fr>

**Date limite de remise du dossier d'admission :** 11 septembre 2009.

Les dossiers envoyés avant le 10 juillet 2009 bénéficieront d'une réponse avant fin juillet, les autres en septembre.

**Date limite d'inscription administrative :** 23 octobre 2009.

Pour toute demande de renseignement complémentaire, vous pouvez consulter le site :

<http://www.logique.jussieu.fr/www.M2-LMFI>

ou vous adresser au :

### Secrétariat du M2 LMFI

**Téléphone :** 01 44 27 37 61

**Fax :** 01 44 27 81 64

**e-mail :** [wasse@math.jussieu.fr](mailto:wasse@math.jussieu.fr)

#### **Localisation :**

Bureau 5C24  
5<sup>ème</sup> étage  
175 rue du Chevaleret  
PARIS 13<sup>ème</sup>

#### **Adresse postale (uniquement) :**

Master 2 LMFI – Site Chevaleret  
Université Paris Diderot – Paris 7  
UFR de Mathématiques, Case 7012  
75205 PARIS Cedex 13

## ORGANISATION

Le Master 2<sup>ème</sup> année LMFI se compose de :

- **deux cours fondamentaux** (48h chacun) assortis de **deux groupes de travail** (24h chacun)
- **deux cours d'orientation** (48h chacun) qui peuvent être choisis parmi les enseignements spécialisés décrits dans la présente brochure ou, après accord du responsable, parmi des unités d'un autre M2, par exemple dans le M2 Mathématiques Fondamentales ou dans le MPRI (Master Parisien de Recherche en Informatique).
- **un stage** d'initiation à la recherche,
- **une unité d'ouverture** (voir liste ci-dessous),
- **un cours préliminaire intensif**, facultatif (30h) exposant les pré-requis de logique (voir p. 9) qui est proposé aux étudiants du 07 au 18 septembre 2009.

Les deux cours fondamentaux débutent le 21 septembre 2009 et s'achèvent le 18 décembre 2009.

Les examens de ces deux cours ont lieu du 4 au 8 janvier 2010.

Tous les cours d'orientation ont lieu du 11 janvier au 2 avril 2010, les examens correspondants ayant lieu du 12 au 16 avril 2010.

La fin de l'année universitaire est consacrée au stage d'initiation à la recherche.

La validation de la 2<sup>ème</sup> année de Master correspond à l'acquisition de 60 crédits ECTS :

- Chaque cours fondamental est crédité de 9 ECTS.
- Chaque cours d'orientation est crédité de 9 ECTS.
- Le stage est crédité de 18 ECTS.
- L'unité d'ouverture, créditée de 6 ECTS, peut être constituée, au choix, à partir de la liste suivante :
  - Modèles de la programmation (fonctionnelle, impérative, objet) (cours et TP sur machine, 24h, 3 ECTS)
  - Initiation à la preuve formelle assistée par ordinateur (cours et TP sur machine, 18h, 3 ECTS)
  - Introduction à la logique catégorique (24h, 3 ECTS)
  - Participation à un cours d'un autre master (3 ECTS)

L'attribution des ECTS correspondant à chacun des modules précédents est conditionnée par l'obtention, pour ce module, d'une note supérieure ou égale à 10. Cependant une compensation est possible entre les deux notes  $F_1$  et  $F_2$  des cours fondamentaux, sous réserve qu'elles soient toutes deux supérieures ou égales à 7 et que leur moyenne soit supérieure ou égale à 10.

Il est attribué une note finale du M2, qui est la moyenne entre  $(F_1+F_2)/2$ ,  $O_1$ ,  $O_2$  et  $S$ , où  $O_1$  et  $O_2$  sont les notes obtenues aux cours d'orientation et  $S$  la note de stage.

Les notes obtenues éventuellement aux modules de l'unité d'ouverture n'interviennent donc pas dans la note finale, mais conditionnent l'obtention des crédits correspondants.

## STAGE

Le stage de M2 du LMFI peut s'effectuer :

- soit dans un laboratoire universitaire, par exemple dans une des deux équipes d'accueil : l'équipe de Logique Mathématique ou l'équipe Preuves, Programmes, Systèmes,
- soit dans un autre laboratoire de recherche, après accord du responsable du M2.

Dans tous les cas, il est placé sous la responsabilité d'un enseignant du Master.

## DEBOUCHES

La suite naturelle de cette formation est la préparation d'un doctorat, soit en logique mathématique, soit en informatique. Pour un doctorat en informatique, la thèse peut éventuellement être préparée dans une entreprise ou un organisme public de recherche (INRIA, CEA...).

Les débouchés sont des postes d'enseignant-chercheur ou de chercheur :

- soit dans le milieu universitaire (français ou étranger) ou des organismes publics de recherche (CNRS, INRIA, CEA)
- soit dans les services de recherche et développement d'entreprises du monde industriel (EDF, France Telecom, Siemens, EADS, etc).

Les services de recherche et développement de ces entreprises sont particulièrement demandeurs d'étudiants ayant une forte compétence à la fois mathématique, logique et informatique, leur permettant d'encadrer des ingénieurs travaillant dans les domaines de la certification de logiciels, de la vérification de programmes et de protocoles, ainsi que de la sécurité informatique. Dans certains cas, le recrutement peut s'effectuer directement à l'issue du master 2<sup>ème</sup> année.

## BOURSES ET/OU LOGEMENT EN RESIDENCE UNIVERSITAIRE

Les demandes de bourse et de logement doivent être faites dans le cadre du dossier social de l'étudiant sur internet :

<https://dse.orion.education.fr/depot>

Afin de saisir votre demande, vous devez être en possession de :

- votre numéro INE figurant sur votre carte d'étudiant(e) ou de votre numéro BEA
- l'avis fiscal concernant les revenus perçus en 2007 par votre famille.

Pour obtenir d'autres informations, vous devez vous connecter sur le site du CNOUS (<http://www.cnous.fr>).

## INFORMATIONS COMPLEMENTAIRES

Les étudiants du M2 ont accès à la bibliothèque de Mathématiques-Recherche (à Chevaleret). Ils ont de plus à leur disposition une bibliothèque au secrétariat du Master, et accès à des salles d'informatique.

Le jury du M2 de Logique Mathématique et Fondements de l'Informatique était constitué comme suit pour l'année universitaire 2008-2009 :

DURAND Arnaud, Professeur à l'Université Paris Diderot - Paris 7, Président  
ROZIÈRE Paul, Maître de Conférences à l'Université Paris Diderot - Paris 7, Vice-Président  
ACHDOU Yves, Professeur à l'Université Paris Diderot - Paris 7  
CORI René, Maître de Conférences à l'Université Paris Diderot - Paris 7  
CHATZIDAKIS Zoé, Directrice de Recherches CNRS  
LASSAIGNE Richard, Maître de Conférences à l'Université Paris Diderot - Paris 7

## LE DOCTORAT

La durée conseillée des études doctorales est de trois ans.

Une année supplémentaire peut être accordée après examen du dossier (comprenant un rapport du directeur de thèse prouvant l'avancement des travaux) et autorisation du directeur de thèse, du directeur de l'Ecole Doctorale, et du Président de l'Université.

Le doctorat débute normalement en 6<sup>ème</sup> année des études universitaires et s'adresse aux étudiants titulaires d'un Master ou d'un diplôme de niveau équivalent (exemple DEA).

## CONTRAT DOCTORAL (anciennement allocation de recherche)

Il s'agit d'un contrat d'une durée de 3 ans.

L'Ecole Doctorale Sciences Mathématiques de Paris-Centre dispose d'un petit nombre de ces contrats pour les étudiants titulaires du Master et désireux de préparer une thèse de doctorat. Le montant mensuel minimum est de 1 663,22 € bruts mensuels. Le doctorant peut demander (auprès du CIES Paris Diderot - Paris 7) à assurer des activités autres que de recherche, notamment d'enseignement. Dans ce cas sa rémunération minimale est fixée à 1998,61 €.

D'autres types de financements sont possibles : projets ANR, bourses INRIA, allocations de la région Île-de-France...

## CONDITIONS D'OBTENTION

L'étudiant qui désire obtenir un contrat doctoral en vue de préparer une thèse doit faire acte de candidature auprès du responsable du M2 au cours de l'année universitaire.

Le jury du M2 établit un classement des dossiers (sur critères scientifiques). L'examen des dossiers a lieu pendant la deuxième quinzaine du mois de juin.

Les étudiants de nationalité étrangère, hors Communauté Européenne, sont invités à se renseigner sur les conditions exigées dans leur cas.

# LISTE DES ENSEIGNEMENTS 2009-2010

Cours préliminaire intensif de logique (*M.-H. Mourgues*)

Cours fondamentaux

- Théorie des modèles et théorie des ensembles (*R. Cori*)
- Calculabilité et incomplétude (*P. Rozière & A. Durand*)

Groupe de travail sur les cours fondamentaux (*S. Boughattas & P. Simonetta*)

Cours d'orientation

- Théorie de la démonstration (*P-L. Curien*)
- Lambda-calcul et preuves (*T. Joly*)
- Introduction à la logique catégorique (*A. Prouté*)
- Complexité booléenne et arithmétique (*G. Malod*)
- Théorie des modèles : les outils classiques (*F. Point*)
- Théorie des modèles des corps (*F. Delon*)
- Théorie des ensembles (*R. Labib-Sami*)
- Jeux infinis et détermination (*B. Velickovic*)

Cours d'ouverture

- Modèles de la programmation (fonctionnelle, impérative, objet) (*E. Chailloux*)
- Initiation à la preuve formelle assistée par ordinateur (*C. Raffalli*)
- Automates sur mots infinis (*O. Finkel*)



# COURS PRELIMINAIRE INTENSIF DE LOGIQUE

(07 AU 18 SEPTEMBRE 2009)

ENSEIGNANTE : M.-H. MOURGUES

## PROGRAMME

**Calcul des propositions** : tables de vérité, tautologies, formes normales, compacité.

**Calcul des prédicats** : langages du premier ordre, termes, formules, modèles ; satisfaction d'une formule dans un modèle ; sous-structures ; isomorphismes ; équivalence élémentaire.

**Théorie des ensembles** : axiomes de Zermelo-Frænkel ; cardinaux ; théorèmes de Cantor et de Cantor-Bernstein ; ensembles finis, ensembles dénombrables.

## BIBLIOGRAPHIE

R. CORI & D. LASCAR : *Logique mathématique : cours et exercices* (nouvelle édition, Dunod, 2 tomes, 2003, chapitres 1, 3, 7).

P. HALMOS : *Introduction à la théorie des ensembles* (Gauthiers-Villars, 1967 ; réimpression : Jacques Gabay, 1997). Version originale : *Naïve Set Theory*, (Van Nostrand, 1960, dernière édition : Springer, 1998)

# COURS FONDAMENTAL DE LOGIQUE MATHEMATIQUE I :

## Théorie des modèles et théorie des ensembles

ENSEIGNANT : R. CORI

### PROGRAMME

**Calcul des prédicats** : théorèmes de complétude et de compacité.

**Eléments de théorie des modèles** : extensions élémentaires, théorèmes de Löwenheim-Skolem, méthode des diagrammes ; théorèmes de préservation ; décidabilité de quelques théories axiomatiques ; ultraproducts, théorème de Los.

**Théorie des ensembles** : ordinaux ; récurrence transfinie ; axiome du choix et énoncés équivalents ; arithmétique des cardinaux infinis ; axiome de fondation ; schéma de réflexion ; résultats élémentaires de cohérence relative.

### BIBLIOGRAPHIE

C.C. CHANG & H.J. KEISLER : *Model Theory* (North-Holland, 1990).

R. CORI & D. LASCAR : *Logique mathématique : cours et exercices* (Dunod, 2 tomes, 2003).

W. HODGES : *Model Theory* (Cambridge University Press, 1993).

J.L. KRIVINE : *Théorie des Ensembles* (Cassini, 1998).

B. POIZAT : *Cours de Théorie des Modèles* (Nur al-Mantiq wal-Ma'rifah, 1985, distribué par Offilib ; il existe aussi une version anglaise : *A course in Model Theory : An introduction to Contemporary Mathematical Logic*, by Bruno Poizat, translated by Moses Klein, Springer Verlag, 2000).

# COURS FONDAMENTAL DE LOGIQUE MATHEMATIQUE II :

## Calculabilité et incomplétude

ENSEIGNANTS : P. ROZIÈRE & A. DURAND

### PROGRAMME

**Calculabilité** : fonctions récursives et fonctions calculables par machine ; caractérisation logique des fonctions calculables ; théorème smn et théorèmes de point fixe ; notions de réduction et problèmes indécidables. Classes de complexité P et NP ; problèmes NP-complets.

**Arithmétique formelle** : axiomes de Peano et sous-systèmes faibles ; arithmétisation de la logique ; théorèmes d'indécidabilité ; les théorèmes d'incomplétude de Gödel.

### BIBLIOGRAPHIE

J. BARWISE (ed) : *Handbook of Mathematical Logic* (North-Holland, 1977-1999).

R. CORI & D. LASCAR : *Logique mathématique : cours et exercices* (Dunod, 2 tomes, 2003).

R. LASSAIGNE & M. de ROUGEMONT : *Logique et Complexité* (Hermès, 1996).

M. MACHTEY & P. YOUNG : *An introduction to the General Theory of Algorithms* (North Holland, 1978).

J.R. SCHOENFIELD : *Mathematical Logic* (Addison-Wesley, 1967. Assoc. for Symb. Logic, 2001).

R. SMULLYAN : *Les Théorèmes d'Incomplétude de Gödel* (Masson, 1993).

O. GOLDBREICH : *Computational Complexity : A Conceptual Perspective* (Cambridge University Press, 2008).

N.D. JONES : *Computability and Complexity : From a Programming Perspective* (MIT Press, 1997).

## **GROUPE DE TRAVAIL**

### **SUR LES COURS FONDAMENTAUX**

ENSEIGNANTS : S. BOUGHATTAS & P. SIMONETTA

*Ces séances seront animées essentiellement par les étudiants eux-mêmes. L'objectif est double. Il s'agit d'une part de permettre aux participants, par la résolution d'exercices et problèmes, de s'assurer d'une bonne compréhension du cours. D'autre part, les étudiants auront l'occasion de s'astreindre à rédiger soigneusement et s'exerceront à faire des exposés oraux devant leurs collègues.*

*Etant donné le volume horaire, il est évident que seule une partie du programme pourra être couverte dans ce groupe de travail.*

# THEORIE DE LA DEMONSTRATION

ENSEIGNANT : P.-L. CURIEN

*La théorie de la démonstration traite de la formalisation et de l'analyse du raisonnement logique. Puisant ses concepts fondamentaux dans les travaux de Gentzen dans les années 1930, elle cherche à mettre en évidence le contenu calculatoire des preuves à travers l'étude de leur structure et de leur dynamique (élimination des coupures). Dans les années 1960, cette approche est illustrée de manière spectaculaire par la « correspondance de Curry-Howard » reliant les preuves aux programmes via le lambda-calcul. Cette dernière est le point de départ des applications en informatique de la théorie de la démonstration (restreinte alors au cas de la logique intuitionniste, i.e. sans le principe du tiers-exclu). L'introduction de la logique linéaire a permis de donner une nouvelle analyse du panorama de la théorie de la démonstration et a été suivie par l'extension de la correspondance de Curry-Howard à la logique classique.*

*Le cours sera consacré à l'étude des outils fondamentaux de la théorie de la démonstration et aux développements récents basés sur la logique linéaire et la logique classique. Ce sont les moteurs de ce qu'il est maintenant convenu d'appeler la « logique de programmation ».*

## PROGRAMME

### **Logiques classique et intuitionniste :**

- Calcul des séquents. Élimination des coupures.
- Dédution naturelle.
- Interprétations calculatoires (Curry-Howard).
- Sémantiques catégorique et dénotationnelle.

### **Logique linéaire :**

- Calcul des séquents et réseaux de preuves.
- Traductions des logiques intuitionniste et classique.
- Modèles.
- Caractérisation de classes de complexité.
- Polarisation et logique classique.

## BIBLIOGRAPHIE

J.Y. GIRARD, Y. LAFONT & P. TAYLOR : *Proofs and Types* (Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 7, Cambridge University Press, 1989).

J.Y. GIRARD, Y. LAFONT & L. REGNIER (editors) : *Advances in Linear Logic* (London Mathematical Society Lecture Notes Series 222, Cambridge University Press, 1995).

J.Y. GIRARD : *Le Point Aveugle* (Cours de Logique, Tomes 1 & 2, Collection Visions des Sciences, Hermann, 2006-2007).

J. GOUBAULT-LARRECQ & I. MACKIE : *Proof Theory and Automated Deduction* (Applied Logic Series 6, Kluwer Academic Publishers, 1997).

A.S. TROELSTRA & H. SCHWICHTENBERG : *Basic Proof Theory* (Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 43, Cambridge University Press, 2nd edition, 2000).

# LAMBDA-CALCUL ET PREUVES

ENSEIGNANT : T. JOLY

*Ce cours tentera de présenter la diversité des lambda-calculs et de leurs systèmes de types. Après quelques brefs rappels paléontologiques, on commencera par étudier dans une approche purement fonctionnelle deux lambda-calculs des plus traditionnels (les lambda-calculs purs typés et non typés de Church).*

*Puis, on étendra ces calculs de différentes façons pour leur permettre d'exprimer de véritables preuves et en révéler le contenu algorithmique via la correspondance de Curry-Howard.*

## PROGRAMME

- Introduction patamathématique au lambda-calcul non typé et à quelques systèmes de types (simples, avec intersection). Représentation des fonctions récursives.
- Propriétés de base de la réduction du lambda-calcul pur non typé : théorèmes de Church-Rösner, des développements finis, de standardisation, de conservation.
- Lambda-calcul pur typé de Church : définissabilité, calcul de modèles observationnels, filtrage et autres casse-tête.
- Correspondance de Curry-Howard et sémantique de la réalisabilité.
- Lambda-calculs pour la logique intuitionniste : PCF, système F, arithmétique fonctionnelle du 2nd ordre, AF2 avec points fixes de types.
- Lambda-calculs pour la logique classique : lambda-mu-calcul, lambda-c-calcul.

## BIBLIOGRAPHIE

H.-P. BARENDREGT : *The lambda-calculus, its syntax and semantics* (Studies in Logic, vol. 103, North-Holland, 1984).

J.-Y. GIRARD, Y. LAFONT & P. TAYLOR : *Proofs and Types* (Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 7, Cambridge University Press, 1989, disponible sur la page de P. Taylor).

J.-R. HINDLEY & J.-P. SELDIN : *Introduction to combinators and lambda-calculus* (London Mathematical Society Students Texts 1, Cambridge University Press, 1986).

J.-L. KRIVINE : *Lambda-calcul : Types et Modèles* (Masson, 1990), ou E. HORWOOD : *Lambda-calculus : types and models* (version augmentée, en anglais, 1992).

J.-C. MITCHELL : *Foundations for Programming Languages* (MIT Press, 1996).

# INTRODUCTION A LA LOGIQUE CATEGORIQUE

ENSEIGNANT : A. PROUTÉ

## PREREQUIS

Les étudiants qui désirent suivre ce cours devront obligatoirement avoir vu préalablement les notions de base de théorie des catégories. Ces notions sont l'objet d'un cours intitulé « **Techniques Catégoriques Fondamentales** » qui aura lieu juste avant celui-ci dans le Master 2 de Mathématiques Fondamentales. Il n'est pas demandé aux étudiants de LMFI de passer l'examen de ce cours préparatoire. Si toutefois ils le passent, il leur tiendra lieu de partiel pour ce cours-ci.

Ce cours est une introduction à la logique catégorique.

## PROGRAMME

Applications croissantes adjointes et logique naturelle. On examinera des modèles de la logique naturelle, dont au moins un qui n'est pas classique.

- Topos élémentaires (Lawvere-Tierney). Langage interne d'un topos et son interprétation. Sémantique de Kripke-Joyal. Validité des preuves structurelles dans un topos. Utilisation du langage interne pour établir les propriétés des topos.
- Topos de préfaisceaux et faisceaux (topologies de Lawvere-Tierney), topos relatifs, topos libres. Applications.
- Terminaison du calcul dans un topos.
- Interprétation des types et énoncés dépendants. Correspondance preuve/programme dans un topos. Axiome du choix. Formalisation des mathématiques.

## BIBLIOGRAPHIE

M. BARR & C. WELLS : *Toposes, Triples and Theories* (<http://www.cwru.edu/artsci/math/wells/pub/ttt.html>).

J.-L. BELL : *Toposes and Local Set Theories. An Introduction* (Dover 2008).

S. Mac LANE : *Categories for the Working Mathematician* (Springer Verlag, 1971).

S. Mac LANE & I. MOERDIJK : *Sheaves in Geometry and Logic* (Universitext, Springer-Verlag, 1992).

C. MacLARTY : *Elementary Categories, Elementary Toposes* (Oxford Logic Guides 21, Clarendon Press Oxford).

A. PROUTÉ : *Cours de logique catégorique* ( <http://www.math.jussieu.fr/~alp> ).

# COMPLEXITE BOOLEENNE ET ARITHMETIQUE

ENSEIGNANT : G. MALOD

*La complexité est l'étude des ressources nécessaires à la résolution par un algorithme d'un problème, les "ressources" en question pouvant être le temps de calcul, l'espace mémoire utilisé, le nombre de processeurs, etc. On s'intéresse alors à la classification des problèmes selon leur difficulté, en distinguant notamment la classe des problèmes "raisonnables" de ceux dont la résolution informatique est trop coûteuse.*

*Pour étudier ces questions mathématiquement, on modélise la notion d'algorithme. Nous verrons principalement deux modèles de calcul. D'une part les circuits, suivant la présentation de Bruno Poizat, car ils sont très simples à définir et donnent une théorie élégante. D'autre part les machines de Turing, le modèle classique utilisé en général pour étudier les questions de complexité.*

*La théorie de la complexité est une branche jeune des mathématiques et de l'informatique et elle est encore en plein développement. Certains concepts peuvent sembler encore rudimentaires, mais ce défaut est contrebalancé par les nombreuses questions ouvertes immédiatement accessibles.*

## PROGRAMME

- Notions de base de complexité : circuits, machines de Turing, réductions, classes en temps et en espace.
- La hiérarchie polynomiale, théorème de Karp-Lipton.
- Classes de comptage, complétude du permanent, théorème de Toda.
- Calculs définis par des circuits arithmétiques, classes de Valiant.
- Complétude du permanent (bis), complexité du déterminant.

## BIBLIOGRAPHIE

- B. POIZAT : *Les Petits Cailloux* (volume 3 of Nur Al-Mantiq Wal-Ma'rifah, Aléas, Lyon, 1995).
- S. ARORA & B. BARAK : *Computational Complexity : A Modern Approach* (Cambridge University Press, à paraître, version provisoire sur internet).
- P. BÜRGISSER : *Completeness and Reduction in Algebraic Complexity Theory* (volume 7 of Algorithms and Computation in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2000).



# THEORIE DES MODELES : LES OUTILS CLASSIQUES

ENSEIGNANTE : F. POINT

*Ce cours supposera connues les notions de théorie des modèles et de théorie des ensembles du cours fondamental. Il abordera certaines des constructions de base en théorie des modèles et les illustrera par des exemples algébriques qui, notamment, seront approfondis dans le cours de F. Delon.*

## PROGRAMME

1. Théorème d'omission des types, modèles premiers, théorème de Ryll-Nardzewski sur les théories  $\aleph_0$ -catégoriques.
2. Théories  $\omega$ -stables, modèles saturés.
3. Modèles d'Ehrenfeucht-Mostowski (théorème de Ramsey, indiscernables).
4. Paires de Vaught, ensembles fortement minimaux, prégéométries.
5. Rang de Morley, rang de Cantor-Bendixon.
6. Théorème de catégoricité de Morley.
7. Théories stables, types définissables, héritiers et co-héritiers. Illustration dans les théories de modules.
8. Constructions de Fraïssé (e.g. le graphe aléatoire).

## BIBLIOGRAPHIE

C. C. CHANG & H. L. KEISLER : *Model theory* (Third édition, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 73, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990, 1977, 1973).

W. HODGES : *Model theory* (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 42, Cambridge University Press, Cambridge, 1993. xiv+772 pp).

N. JACOBSON : *Basic Algebra 2* (W.H. Freeman and Company, San Francisco , 1980).

D. MARKER : *Model Theory, An Introduction* (Graduate Texts in Mathematics, 217, Springer-Verlag, New York, 2002. viii+342 pp).

A. PILLAY: *An Introduction to Stability Theory* (Clarendon Press, Oxford, 1983, autre édition : édition Dover).

B. POIZAT : *Cours de théorie des modèles* (1985, Nur Al-Mantiq Wal-Ma'rifah, version anglaise éditée chez Springer en 2000).

# THEORIE DES MODELES DES CORPS

ENSEIGNANTE : F. DELON

*Ce cours est un compagnon naturel du cours de théorie des modèles présentant les outils classiques. Il approfondira l'exemple des corps algébriquement clos, structures fortement minimales fondamentales.*

*Il présentera également la théorie des modèles des corps ordonnés réellement clos et celle des corps valués algébriquement clos, ainsi qu'un cadre englobant ces deux classes de structures : celui des structures "relativement" minimales.*

*Les notions adaptées sont ici plus précisément la o-minimalité et la C-minimalité.*

## PROGRAMME

- Corps algébriquement clos.
- Corps réellement clos.
- Corps valués algébriquement clos.
- Diverses notions de minimalité, théories géométriques, problématique de la trichotomie.

## BIBLIOGRAPHIE

D. MARKER : *Introduction to the Model Theory of Fields* (in *Model Theory of Fields*, Marker, Messmer & Pillay, LNL 5, Springer).

J. BOCHNAK, M. COSTE & M-F. ROY : *Géométrie algébrique réelle* (Springer).

C. C. CHANG & J. KEISLER : *Model Theory* (North-Holland).

F. DELON : *Model Theory of Hasse Closed Fields* (Notes d'un cours donné à Berlin en septembre 2007, section 1).

A. PILLAY : *Model theory of algebraically closed fields*.

E. BOUSCAREN : *in Model Theory and Algebraic Geometry* (LNM 1696, Springer).

D. MARKER : *Model Theory : An Introduction* (Graduate Texts in Mathematics, Springer).

Y. PETERZIL & S. STARCHENKO : *Geometry, Calculus and Zil'bers Conjecture* (BSL 2, 1996, 72-83).

# THEORIE DES ENSEMBLES

ENSEIGNANT : R. LABIB-SAMI

*Le 8 août 1900, lors du second Congrès International des mathématiciens, à Paris, David Hilbert énonça une liste de 23 problèmes mathématiques qui, selon lui, devaient servir de guide pour les recherches à venir dans le nouveau siècle. Le premier problème de cette liste, l'hypothèse du continu de Cantor, a été résolu, en deux temps : par Gödel (1938) qui construisit un modèle interne de l'hypothèse généralisée du continu, et par Paul Cohen (1963), qui a inventé une construction de modèle pour la négation de l'hypothèse de Cantor.*

## PROGRAMME

Ce cours couvrira principalement les deux constructions de modèles de la théorie des ensembles introduites par Gödel et Cohen :

**Modèles internes** : principalement, les ensembles constructibles de Gödel, cohérence de l'axiome du choix et de l'hypothèse généralisée du continu, quelques conséquences de l'axiome de constructibilité.

**Forcing** : constructions de base ; modèles pour l'indépendance de l'hypothèse du continu, de l'axiome du choix ; modèle de Lévy-Solovay.

## BIBLIOGRAPHIE

T. JECH : *Set Theory* (Springer Verlag, 2002).

J.-L. KRIVINE : *Théorie des ensembles* (Cassini, 1998).

K. KUNEN : *Set Theory* (North-Holland, 1983).

A. LEVY : *Basic Set Theory* (Springer Verlag, 1979).

Y. N. MOSCHOVAKIS : *Descriptive Set Theory* (North-Holland, 1980).

# JEUX INFINIS ET DETERMINATION

ENSEIGNANT : B. VELICKOVIC

*L'étude de la détermination, c'est-à-dire l'existence des stratégies gagnantes pour l'un des joueurs, dans les jeux infinis à l'information parfaite a un rôle central en théorie descriptive des ensembles.*

*D'un côté elle permet de développer une théorie satisfaisante pour les ensembles projectifs et plus généralement définissables qui étend la théorie classique des ensembles analytique et co-analytique.*

*De l'autre côté on peut utiliser les axiomes de grands cardinaux pour démontrer la détermination des ensembles définissables ce qui a permis à la fois de justifier ces axiomes et de développer la théorie des modèles internes pour les grands cardinaux.*

## PROGRAMME

Dans ce cours nous allons présenter les résultats fondamentaux de cette théorie : le théorème de Gale-Stewart sur la détermination des jeux fermés, les théorèmes de Martin sur la détermination des jeux boréliens et analytiques. Nous allons aussi présenter quelques conséquences de l'axiome de la détermination (AD) et ses versions restreintes.

## BIBLIOGRAPHIE

D. GALE & F. M. STEWART : *Infinite games with perfect information*, in *Contributions to the Theory of Games II* (Annals of Mathematics Studies 28, Princeton University Press, Princeton NJ (1953): 245-266).

T. JECH : *Set theory* (The third millennium edition, revised and expanded, Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003).

D. MARTIN DONALD : *Borel determinacy* (Ann. of Math. (2) 102 (1975), no. 2, 363-371).

D. MARTIN DONALD & J. STEEL : *A proof of projective determinacy* (J. Amer. Math. Soc. 2 (1989), no. 1, 71-125).

Y. MOSCHOVAKIS : *Descriptive set theory* (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 10. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1980).

I. NEEMAN : *Determinacy in  $L(\mathbf{R})$*  (Handbook of Set Theory).

# MODELES DE LA PROGRAMMATION

ENSEIGNANT : E. CHAILLOUX

*Ce cours propose une mise à niveau en programmation à travers divers styles de conception et d'écriture des programmes : fonctionnel, impératif et objet.*

*Le cours s'appuiera sur le langage O'Caml autorisant les trois styles évoqués. Il sera accompagné de séances de travaux dirigés en salle machine.*

## BIBLIOGRAPHIE

E. CHAILLOUX, P. MANOURY & B. PAGANO : *Développement d'applications avec Objective Caml* (O'Reilly, 2000).

G. COUSINEAU & M. MAUNY : *Approche fonctionnelle de la programmation* (Ediscience, 1995).

C.A. GUNTER : *Semantics of Programming Languages : structures and techniques. Foundations of Computing* (MIT Press, 1992).

X. LEROY (with D. Remy, J. Vouillon and D. Doligez) : *The Objective Caml System* (Documentation and user's guide, release 2.02, <http://caml.inria.fr/ocaml>).

P. WEIS & X. LEROY : *Le Langage Caml* (Inter Edition, 1993).

# INITIATION A LA PREUVE FORMELLE ASSISTEE PAR ORDINATEUR

ENSEIGNANT : C. RAFFALLI

*3 heures de cours introductif + cours et travaux dirigés en salles machines.*

*Depuis plusieurs années, la preuve formelle sur machine se développe. Plusieurs systèmes existent : Coq, Isabelle, Mizar...*

*Dans ce cours, nous utiliserons PhoX pour démontrer des résultats mathématiques (non triviaux) et éventuellement la correction de petits programmes ML.*

Un cours de 3 heures introduira les concepts de base qui seront illustrés par une prise en main du système lors de la première séance sur ordinateur. Les autres séances seront consacrées à des exemples plus aboutis en mathématiques (ou en informatique pour ceux qui le désirent) choisis en partie par les étudiants.

# AUTOMATES SUR MOTS INFINIS

ENSEIGNANT : O. FINKEL

*Les automates sur mots infinis ont été introduits par Büchi dans les années 1960 pour étudier la décidabilité de la théorie d'un successeur sur les entiers. Ils ont depuis été très étudiés et utilisés pour la spécification et la vérification de systèmes ne terminant pas, comme un système d'exploitation.*

*La théorie des automates lisant des mots infinis a des liens avec de nombreux domaines, en particulier avec la topologie, la logique, les jeux infinis qui modélisent le comportement d'un système en interaction avec un environnement.*

*On présentera les notions classiques d'acceptation de mots infinis par automates finis et on étudiera les aspects fondamentaux de cette théorie. On abordera l'étude des jeux infinis, modélisant le comportement d'un système en interaction avec un environnement, et la construction de stratégies gagnantes effectives dans ces jeux. Cette construction correspond à la synthèse de programmes dans les systèmes réactifs.*

## PREREQUIS

Des notions de bases sur les automates finis (lisant des mots finis) seraient souhaitables, et peuvent être trouvées par exemple dans le livre d'O. Carton cité ci-dessous. Cependant ceci n'est pas indispensable, les rappels nécessaires seront faits.

## BIBLIOGRAPHIE

J. R. BÜCHI : *On a Decision Method in Restricted Second Order Arithmetic* (Logic Methodology and Philosophy of Science, (Proc. 1960 Int. Congr.), Stanford University Press, 1962, p. 1-11).

O. CARTON : *Langages Formels* (Calculabilité et Complexité, Vuibert, 2008).

E. GRÄDEL, W. THOMAS & T. WILKE (editors) : *Automata, Logics, and Infinite Games* (A Guide to Current Research, Lecture Notes in Computer Science, Volume 2500, Springer, 2002).

D. PERRIN & J.-E. PIN : *Infinite Words, Automata, Semigroups* (Logic and Games, Volume 141 of Pure and Applied Mathematics, Elsevier, 2004).

L. STAIGER :  *$\omega$ -Languages*, in *Handbook of Formal Languages* (Volume 3, edited by G. Rozenberg and A. Salomaa, Springer-Verlag, Berlin, 1997).

W. THOMAS : *Automata on Infinite Object* (J. Van Leeuwen, ed., Handbook of Theoretical Computer Science, Volume B, Elsevier, Amsterdam, 1990, p. 133-191).

W. THOMAS : *Languages, Automata and Logic* (Handbook of Formal Languages, Volume 3, edited by G. Rozenberg and A. Salomaa, Springer Verlag, Berlin, 1997).